

小池茂昭

Shigeaki Koike

私の研究分野は数学の完全非線形偏微分方程式です。2024年度の半期の講義で大学院生向けに、私の専門である粘性解理論を紹介しました。これは、その最後の回のノートの一部です。粘性解とは偏微分方程式に現れる解の候補「弱解」の一つです。通常、偏微分方程式は解が簡単に見つからないため、まず弱解を見つけ、それが本当の解(古典解と呼びます)になることを確かめるという2段階に分けます。数値物理学に現れる方程式では弱解として超関数解が用いられますが、工学・経済学(ファイナンス)・微分幾何学に登場する完全非線形方程式には超関数解が適さず、研究が進んでいませんでした。1980年代初頭に新しい弱解の概念「粘性解」が導入され、完全非線形方程式の研究が大幅に進歩しました。このページは2022年の私の論文の主要定理の証明の第1段階で、その定理は、古典解で知られている、完全非線形2階一様楕円型偏微分方程式におけるAleksandrov-Bakelman-Pucci

$$\beta := \frac{1}{2\|Dg(x)\|} > 0.$$

$$\forall y \in \overline{B}_{\beta r_0} \quad \exists z \in \overline{B}_{r_0} \quad \text{s.t.} \quad G(z) = y. \quad (g(x+z) - g(x) = y).$$

$$\beta |z| \leq |y| \leq (\beta + \|Dg(x)\|) |z|$$

$$\forall y \in \overline{B}_{\beta r_0} \quad \exists z \in \overline{B}_{r_0} \quad \text{s.t.} \quad g(x) + y \in F, \quad \exists t \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad (y: \text{diff. at } g(x+y)).$$

$$g(x+z) - g(x) = Dg(x)z + r(z)$$

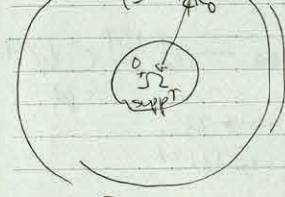
$$\frac{r(z)}{|z|} = \omega(|z|) \rightarrow 0$$

$$D\varphi(g(x)+y) - D\varphi(g(x))$$

$$(T_m(\mathcal{U}, z, KS_{2022}), \quad p_0 < p < n)$$

$$p(D^2u) - \mu_g |Du| \leq f^+ + |\mu - \mu_s| |Du| + \varepsilon |Du| + \frac{1}{\varepsilon} |\mu - \mu_s|$$

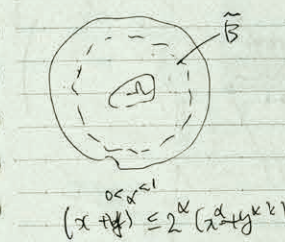
Lemma 3.3. $p_0 < p < n$, $M, g \in L^p(B)$ $\|g\|_{L^p(B)} = Y$.
 $\exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\|M\|_{L^q}, \mu, \text{diam } B)$ s.t. $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, then
 $\{FP(D^2v) - \mu_g |Dv| - \varepsilon |Dv|^{\frac{n}{n-p}} = g \text{ in } B, \quad v = 0 \text{ on } \partial B\}$
 has a strong sol $v \in W^{2,p}$.
 s.t. $\|v\|_{\infty} \leq C(\|g\| + \varepsilon)$
 $\text{diam } \Omega = R_0$
 $\beta < \beta' < p \quad t = \frac{n\beta'}{n-\beta} < \frac{n\beta}{n-\beta} = p^*$
 証明
 fixed



$$B_R := \{u \in W^{1,p}(B) \mid \|u\|_{W^{1,p}(B)} \leq R\} \subset W^{1,p}(B)$$

$$p(D^2v) - \mu_g |Dv| = \varepsilon |Dv|^{\frac{n}{n-p}} + g \in L^p$$

$$v := Tw \in W^{2,p}(B).$$



$$\|Tw\|_{W^{2,p}(B)} \leq C(\|g\|_{L^p(B)} + \varepsilon \|Dw\|_{L^p}^{\frac{n}{n-p}})$$

$$\int_B |Du|^p \leq \int_B |u|^{\frac{p}{n}} \int_B |Du|^{\frac{n-p}{n}} \leq \int_B |u|^{\frac{p}{n}} \int_B |Du|^{\frac{n-p}{n}}$$

$$\|Du\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^{\frac{n}{n-p}}} \|Du\|_{L^{\frac{n-p}{n}}}^{\frac{n-p}{n}}$$

$$\left(\varepsilon \|D^2u\|_{L^p} + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_{L^p}^{\frac{n-p}{n}} \right)^{\frac{n-p}{n}}$$

の最大値原理を粘性解に対して成立することを示した定理です。臨界係数かつ、外力項の上接集合上での積分量だけで解を評価しており、古典解と同等の(つまり形式的計算で導かれる)結果を得ています。よって、これ以上のよい結果は期待できません。その後、時間発展のある完全非線形2階一様放物型偏微分方程式の粘性解に対するAleksandrov-Bakelman-Pucci-Krylov-Tsoの最大値原理も解決し、2026年に出版されました。どちらも、今後の研究の礎となるもので、自信作です。

$$\sup_{\overline{\Omega}} u_j \leq \sup_{\partial \Omega} u \in \mathbb{R}$$

$$p(D^2u_j - u) = \mu_j |Du_j| - \mu |Du|$$

$$\| \mu_j |Du_j| - \mu |Du| \|_{L^p(\Omega)} \leq \|(\mu_j - \mu) |Du_j| \|_{L^p(\Omega)} + \| \mu |Du_j - Du| \|_{L^p(\Omega)}$$

$$\int_{\Omega} |\mu_j - \mu| |Du_j|^n \leq \left(\int_{\Omega} |\mu_j - \mu|^{\frac{n}{n-p}} \right)^{\frac{n-p}{n}} \left(\int_{\Omega} |Du_j|^{\frac{n}{n-p}} \right)^{\frac{n}{n-p}}$$

$$\|u_j\|_{W^{2,p}} \leq C(\| \mu_j - \mu \|_{L^q} + \|Du_j\|_{L^p})$$

$$\|Du_j\|_{L^p} \leq C(\| \mu_j - \mu \|_{L^q} + \|Du_j\|_{L^p})$$

$$\frac{n\beta}{n-\beta} - \frac{\beta}{\beta-p} = \frac{(n-\beta)(\beta-p)}{\beta-p}$$

$$W^{1,p} \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-p}} \hookrightarrow L^{\frac{n}{\beta-p}}$$

$$\|u_j - u\|_{L^\infty} \leq C(\| \mu_j - \mu \|_{L^q} + \|Du_j\|_{L^p})$$

$$u_j \rightarrow u \text{ in } C(\overline{\Omega})$$

$$(p^+(D^2v) + \mu |Dv|) = -f^+ - \varepsilon \leq 0$$

$$v|_{\partial \Omega} = 0, \quad C(H) \leq v \leq 0.$$

$$W = u + v$$

$$p(D^2W) - \mu |Dw| \leq -\varepsilon \leq 0 \quad W \in C$$

$$W|_{\partial \Omega} = 0$$

$$u = u + v - v \leq 0 + (-v) \leq C(\|f\| + \varepsilon)$$