小池 研究室

at 55N 号館 308 室

応用物理学科・数理物理学研究室

非線形偏微分方程式研究

自己紹介

今年で４年目ですので、現在の３年生は数学概論 A やフーリエ解析を zoom で講義を聞いていると思います。

私は物理学科の卒業生で、数理物理学研究室を卒業研究に選びました。皆さんの中にもいるでしょうが、物理・応物の数学関連科目に魅せられ、数学にはまってしまった一人です。当時のゼミでは、数学という壮大な理論体系を学ぶのでなく、目の前に現れた問題に挑むという、ゲリラ戦法でした。この姿勢は、物理・応物の学生の気質に合っているようで、多くの著名な数学研究者を輩出してきました。

大学院から、数学専攻に行きましたが、当時、数理物理学研究室が数学専攻の院生を取れるというシステムがあり、数理物理学研究室の先生が指導教員でした。

研究内容

物理現象、さらに化学反応や生物モデルなどの自然現象を数学的手法で研究するのが数理物理学研究室の研究対象です。数学の道具としては、偏微分方程式論を主に用います。私の研究は、自然現象だけでなく、ファイナンスを含む社会現象に現れる問題にも関連します。

偏微分方程式研究のため、関数解析学、実解析学等の知識が必要となります。研究対象になる偏微分方程式は具体的な関数で解が見つかる、と言う意味では解の存在を示すことはほとんどできません。そこで、解を「求める」のではなく、最初に**解の候補**を探します。この解の候補を弱解と呼びます。この段階では３年で勉強する関数解析学が威力を発揮します。次に、弱解が本当の解になることを示します。ここで、実解析学等の様々な工夫が必要になります。

偏微分方程式研究において、このように二段階に分けるという “発想の革命” は

80 年ほど前に起きました。皆さんも聞いたことのある**超関数**が、多くの偏微分方程式の弱解として現在も様々な偏微分方程式に対して活発に研究されています。

偏微分方程式はいくつかのタイプに分類できますが、私の研究分野から見た二つのタイプを紹介します。一つは、エネルギー最小化から導かれるオイラー・ラグランジュ方程式が持つ**発散型**というタイプです。

ここでは、$\mathbb{R}^n$ 全体を関数の定義域とせず、有界な領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を考えます。これは、後で部分積分を考えるからです。$f : \Omega \to \mathbb{R}$ を与えられた関数とします。

関数 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し、$\nabla u := (u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n})$ とし、次のエネルギー $I[u]$

$$I[u] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu \right) dx$$

の最小化から導かれるオイラー・ラグランジュ方程式は次の Poisson 方程式

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{Poisson 方程式}$$

になります。ここで、$\Delta u := u_{x_k x_k} + u_{x_2 x_2} + \cdots + u_{x_n x_n}$ としています。以降、未知関数は u で表します。この方程式の "超関数の意味での" 弱解 u の定義を次の等式がすべての関数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して成り立つこととします。

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx$$

u の 2 階微分に意味がつけば、ガウスの発散定理（つまり、**部分積分！**）により、Poisson 方程式の "本当の解" になることがわかります。

一方、部分積分ができないタイプの偏微分方程式には、このような超関数の意味での弱解は適用できません。例えば、光学に現れる次の eikonal 方程式は部分積分できないタイプです。このタイプの偏微分方程式を**非発散型**と言います。

$$|\nabla u| = 1 \quad \text{in } \Omega \tag{eikonal 方程式}$$

ここで、$|\nabla u| = \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \cdots + u_{x_n}^2}$ です。

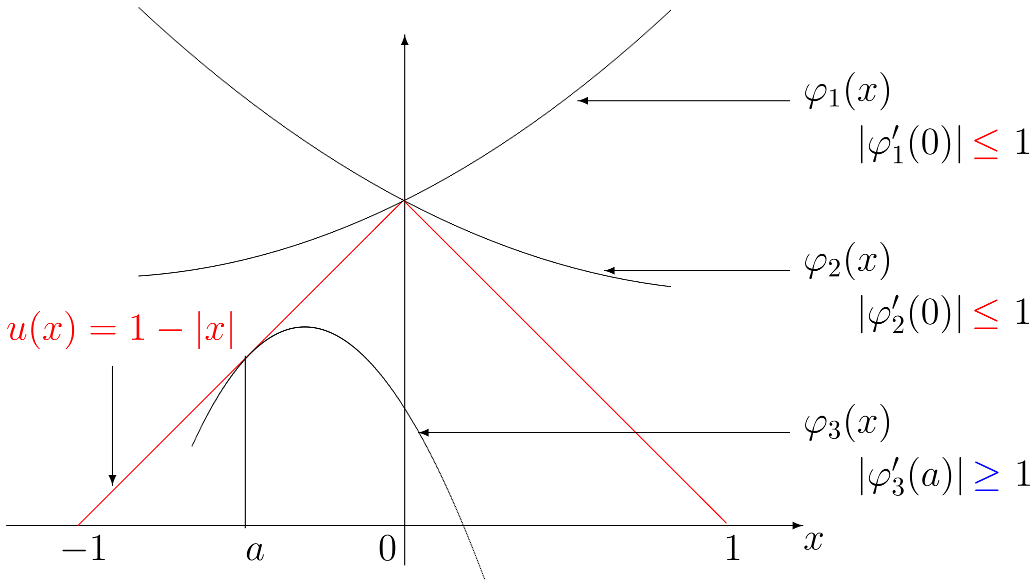
この方程式に対する、弱解の定義は次のように与えます。

$$\left[\begin{array}{c} \varphi \in C^\infty(\Omega) \text{ が } u \text{ に 上から } x \in \Omega \text{ で接していれば、} \underline{|\nabla \varphi(x)| \le 1} \\ \text{下から 接していれば、} \underline{|\nabla \varphi(x)| \ge 1} \text{ が成り立つ。} \end{array} \right]$$

eikonal 方程式にディリクレ境界条件をゼロとした時、つまり

$$u(x) = 0 \qquad (\forall x \in \partial\Omega)$$

を仮定すると、$u(x)$ は境界 $\partial\Omega$ からの距離関数になることが期待されます。例えば、$n=1$ で、$\Omega=(-1,1)$ とすると、$u(x)=1-|x|$ が解として期待されます。(原点で微分可能でないことに注意。)上に述べた弱解の定義は次のグラフを見てください。(u が原点で下から接する関数は存在しないことに注意しましょう。)



この定義は、流体力学の**粘性消滅極限の特異極限**が満たす性質で、粘性解 と呼ばれます。後に、工学における確率最適制御理論に現れる**動的計画原理**から全く同じ性質が導出されることがわかりました。このため数理ファイナンスなどへの応用も自然に広がっていきました。

超関数を用いた弱解は「部分積分」が鍵となりましたが、この定義の本質は最大値原理です。最大値原理とは、『関数が最大値を取る点では、その関数の2階微分はゼロ以下』という高校生でも知ってる事実が元になってます。

粘性解は、M. G. Crandall と P.-L. Lions によって 1980 年初頭に導入され、今まで扱えなかった偏微分方程式が研究できるようになり、現在も盛んに研究されています。P.-L. Lions は 1994 年に非線形偏微分方程式研究者として初めて Fields 賞を受賞しました。

私が最初に読んだ論文は、51 号館地下の図書室で見つけたもので、このような超関数の意味での弱解が適用できないタイプの方程式でした。勉強しているうちに欧米で粘性解の概念が誕生したことを知りました。その後、粘性解理論やその応用に関する様々な研究をしてきました。

Lions 先生と (1995 年)

最近の私の興味　（みんな難しいです・・・）

(1) 完全非線形方程式の弱解の微分可能性
非線形とは、線形でないことです。線形の次に良い性質は凸です。完全非線形とは、凸ですらないという意味で、完全非線形方程式の弱解の微分可能性はまだまだ未開拓です。幾何や確率最適制御などに現れます。

(2) 自由境界問題の解の正則性
自由境界問題は、変分問題や相転移、金融商品の価格決定にも現れます。2016 年の Fields 賞受賞者の研究対象です。非発散型偏微分方程式の研究は始まったばかりです。

(3) 微分積分方程式の粘性解理論
非局所作用素を持つ微分積分方程式で、世界的にホットな話題です。連続なブラウン運動でなく、不連続も許す乱雑性のあるレヴィ過程から導かれます。Poisson 方程式の Δ の代わりに、非発散型の分数冪ラプラシアンが登場します。私の学生が最近良い結果を得ました。

(4) 平均場ゲームの理論と応用
P.-L. Lions が再発見した発散型と非発散型の連立偏微分方程式で、欧米で流行っています。分子運動のアナロジーで、分子が “意思” を持って経済活動するモデルです。応用数理の先生と一緒にゼミをしてます。

(5) <u>特異・退化楕円型方程式の粘性解理論</u>

(1)-(4) の結果を特異性や退化性のある方程式に一般化して、より広い応用を目指します。

小池研究室のスケジュール等（予定）

卒業研究のゼミは通常週１回します。さらに、小澤研究室の学生と合同で関数解析の勉強をしてもらいます。また、土曜の午後に他大学の先生をお招きして最新の研究の講演をして頂く勉強会があります。数学の内容は難しいでしょうが、講演の仕方等、参考になることがあります。是非、参加してください。

私自身は、夏休みをごく短くしか取らないので、夏休みのゼミの希望があればします。数学は一ヶ月勉強しないと取り戻すのに、半年から１年かかりますので継続して勉強をすることが大切です。

なるべく大学院に進学してほしいと思います。というのは、学部だけでは、本当の面白さを理解するには短いと考えているからです。

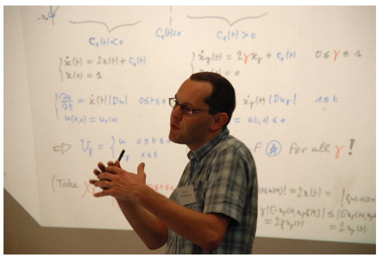
2022 年度の研究室のメンバー

卒研ゼミ２名、修士１年１名、博士３年１名（学振特別研究員）

とある研究集会での講演

夏合宿風景（早稲田でやれるかな？）

最近の共同研究者 A. Święch (米)



最近の共同研究者 O. Ley (仏)

研究活動

理論研究で重要な活動は、各自の勉強・研究の他に、関連研究者との研究討論です。特別な実験器具がない代わりに、私たち自身が各々唯一無二の高度な精密機械です。時には、精密機械同士が出会って、互いに新たな着想を得たり、思わぬアイディアを見つけたりします。これこそ、理論研究の醍醐味です。

Evans 先生と MSRI で (1990 年)

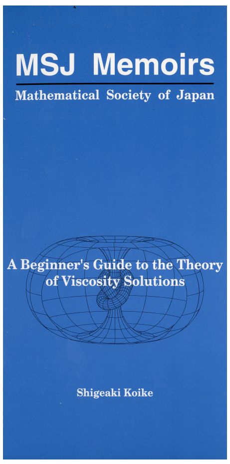
Japanese rafting team (1998 年)

Wambat 先生とオーストラリアで (1995 年)

・・・出会いを求めて、いろいろ旅をしました。

主な著書

A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions (2004 年)



粘性解 (2016 年)