

ABP 最大値原理について

小池 茂昭 (東北大学)*

概 要

二階楕円型・放物型偏微分方程式において最大値原理は、最も基本的な性質であり、解の正則性の研究の第一歩でもある。Aleksandrov-Bakel'man-Pucci の最大値原理 (以降, ABP 最大値原理と呼ぶ) は、最大値という各点での関数の値をその積分量によって評価するものである。近年、完全非線形二階一様楕円型・放物型方程式の弱解 (粘性解) の Harnack 不等式や, Calderón-Zygmund 評価にも本質的に用いられている ([3])。

ここでは、古典 (劣) 解に対する ABP 最大値原理の証明を眺めてみよう。

1. 序

高校生でも知っている次の性質から始めよう。

$u : (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ が $x \in (-1, 1)$ で最大値をとれば, $u''(x) \leq 0$ が成り立つ。

よって、任意の $x \in (-1, 1)$ に対し, $-u''(x) < 0$ を満たせば, 次の性質が成り立つ。

$$\max_{x \in [0, 1]} u(x) = \max\{u(0), u(1)\}$$

この多次元版を考える。以下, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ は、有界開集合とする。 $n \times n$ 実対称行列 $A = (a_{ij})$ (以降, このように書いて, A の i 行 j 列成分が a_{ij} であるとする) が非負であるとし, $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ が

$$-\mathrm{Tr}(AD^2u) = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} < 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

を満たせば, 次の等式が成り立つ事を証明しよう。(Tr は, トレースを表す)

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$$

A の固有値を $\lambda_k \geq 0$ とする。 A は直交行列 $\Sigma = (\sigma_{ij})$ を用いて,

$$\Sigma A \Sigma^T = (\lambda_i \delta_{ij}) =: \Lambda$$

と対角化できる。ここで, Σ^T で Σ の転置行列を表す。 $\sigma_k := (\sigma_{k1}, \dots, \sigma_{kn}) \in \mathbf{R}^n$ ($1 \leq k \leq n$) とおく。

$\max_{\bar{\Omega}} u \geq \max_{\partial\Omega} u$ は常に成り立つから, $\max_{\bar{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$ として矛盾を導く。すると, $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ となる $x_0 \in \Omega$ がある。 $x_0 \in \Omega$ なので次の不等式を満たす $t_0 > 0$ がある。

$$u(x_0 \pm s\sigma_k) \leq u(x_0) \quad \text{for } \forall s \in (-t_0, t_0), k \in \{1, \dots, n\}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J92, 35K10

キーワード: 最大値原理

* 〒980-8578 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-3 東北大学 大学院理学研究科
e-mail: koike@math.tohoku.ac.jp

故に、各 $k \in \{1, \dots, n\}$ に対し、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{u(x_0 + s\sigma_k) + u(x_0 - s\sigma_k) - 2u(x_0)}{s^2} \leq 0$$

$s \rightarrow 0$ とすれば、 $\langle \sigma_k D^2 u(x_0), \sigma_k \rangle \leq 0$ となる。 ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ で n 次元のユークリッド内積を表す) 次のように変形できるので、(1) に矛盾する。

$$\text{Tr}(AD^2 u(x_0)) = \text{Tr}(\Sigma^T \Lambda \Sigma D^2 u(x_0)) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle \sigma_k D^2 u(x_0), \sigma_k \rangle \leq 0$$

同じ事は、 a_{ij} が $x \in \Omega$ に依存していても成り立つ。その際、関数 $x \in \Omega \rightarrow a_{ij}(x)$ の連続性は不要である事に注意する。

(1) を仮定するのは、偏微分方程式の立場からは不自然なので、

$$-\text{Tr}(A(x)D^2 u(x)) \leq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

を仮定する。同じ結論を得るために $(a_{ij}(\cdot))$ が非負より強い、正であると仮定する。

$$\langle \xi A(x), \xi \rangle > 0 \quad \text{for } x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^n \quad (3)$$

この仮定の下で、 $\varepsilon > 0$ に対し、 $u^\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon|x|^2$ とおくと、次の不等式が成り立つ。

$$-\text{Tr}(A(x)D^2 u^\varepsilon(x)) \leq -2\varepsilon \text{Tr} A(x) < 0$$

但し、(3) から、 $a_{ii}(x) > 0$ ($1 \leq i \leq n$) となる事を用いた。故に、 $\max_{\bar{\Omega}} u^\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u^\varepsilon$ が成り立つ。ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば、 $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ が導かれる。

2. 最大値原理

次に (2) の右辺が 0 でない場合を考える。

$$-\text{Tr}(A(x)D^2 u(x)) \leq f(x) \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

以降、 $A(x) = (a_{ij}(x))$ に対し、次の仮定をする。ここでは、これを**一様楕円性**と呼ぶ。

$$\exists \lambda > 0 \text{ such that } \langle \xi A(x), \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2 \quad \text{for } x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^n \quad (5)$$

この仮定の下で、(4) の非斉次項 f が有界ならば、次の最大値原理が得られる。

命題 1 (5) と $f \in C(\bar{\Omega})$ を仮定し、 $\|f\|_\infty := \max_{\bar{\Omega}} |f|$ とおく。 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ が (4) を満たすならば、次の不等式が成り立つ定数 $C_0 = C_0(n, \lambda, \text{diam}(\Omega)) > 0$ が存在する。

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u + C\|f\|_\infty \quad (6)$$

証明 $x_0 \in \Omega$ を固定し、 $\mu > 0$ に対し、 $v^\mu(x) = u(x) + \mu|x - x_0|^2$ とおく。 v^μ は、

$$-\text{Tr}(A(x)D^2 v^\mu(x)) \leq f(x) - 2\mu \text{Tr} A(x)$$

を満たす. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\mu = \mu^\varepsilon := \frac{\|f\|_\infty + \varepsilon}{2\lambda n}$ とおくと次の不等式が成り立つ.

$$-\text{Tr}(A(x)D^2v^\mu(x)) \leq -\varepsilon < 0$$

但し, 一様楕円性から $a_{ii}(x) \geq \lambda$ ($1 \leq i \leq n$) が成り立つ事を用いた.

故に, $\max_{\bar{\Omega}} v^\mu = \max_{\partial\Omega} v^\mu$ を得る. 簡単な計算で, 次のような評価が導かれる.

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\bar{\Omega}} v^\mu = \max_{\partial\Omega} v^\mu \leq \max_{\partial\Omega} u + \frac{(\text{diam}(\Omega))^2}{2\lambda n} (\|f\|_\infty + \varepsilon)$$

ここで, $\text{diam}(\Omega)$ は Ω の直径である. 最後に, $\varepsilon \rightarrow 0$ とすればよい. $\square$

3. ABP 最大値原理 (楕円型)

ABP 最大値原理は, (4) の右边が非有界な関数でも, $f \in L^n(\Omega)$ ならば, $\|f\|_{L^\infty}$ の代わりに $\|f\|_{L^n}$ で置き換えて, 命題 1 の結論 (6) が成立する事を保証する命題である. 命題 1 の証明で μ の取り方を工夫しても証明できないので, 全く違う発想が必要である.

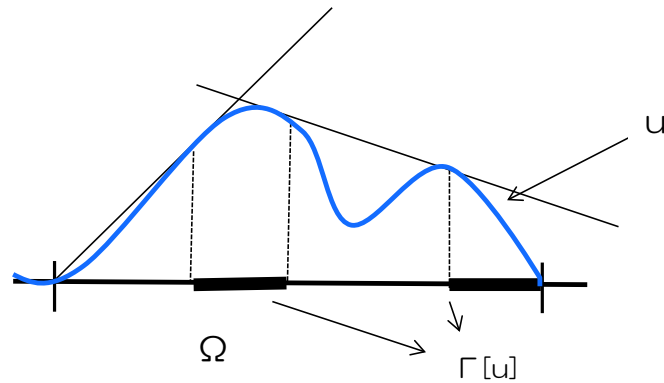
また, 非発散型偏微分方程式への応用が念頭にあるので, 部分積分を用いずに証明する必要がある. 例えば, (4) の a_{ij} に微分可能性を仮定しない場合でも以下の結果は適用できる.

以降, $r > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ に対し, $B_r(x) := \{y \in \mathbf{R}^n \mid |x - y| < r\}$ とおき, $B_r := B_r(0)$ と略す.

ここで, 重要な概念を導入する. $u \in C(\bar{\Omega})$ と開集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ に対し, u の (Ω_0) に関する) **上接集合** (upper contact set) $\Gamma[u; \Omega_0]$ を次のように定義する. $r > 0$ に対し,

$$\Gamma_r[u; \Omega_0] := \{x \in \Omega_0 \mid \exists p \in B_r \text{ such that } u(y) \leq u(x) + \langle p, y - x \rangle \text{ for } \forall y \in \Omega_0\}$$

とおく. 更に, $\Gamma[u; \Omega_0] := \bigcup_{r>0} \Gamma_r[u; \Omega_0]$ とする. $\Omega_0 = \Omega$ の時は, $[\dots]$ 中の Ω_0 は略す.



《 上接集合の図 》

注意 $\Gamma_r[u]$ の定義において, B_r の代わりに, $\bar{B}_r$ にした方が, 粘性解に対する ABP 最大値原理の証明には都合がよいことがある.

定理 2 (5) と $f \in L^n(\Omega)$ を仮定する. $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ が (4) を満たすならば, 次の不等式が成り立つ定数 $C_0 = C_0(n, \lambda) > 0$ が存在する.

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u + C_0 \text{diam}(\Omega) \|f^+\|_{L^n(\Gamma[u])}$$

証明 $r := \frac{1}{\text{diam}(\Omega)} \left(\max_{\bar{\Omega}} u - \max_{\partial\Omega} u \right) > 0$ の場合のみ証明すればよい.

$Du(\Gamma_r[u]) = B_r$ となる事を示そう. まず, $p \in B_r$ を任意に固定し, 関数 $y \in \bar{\Omega} \rightarrow u(y) - \langle p, y \rangle$ の最大値をとる点を $x \in \bar{\Omega}$ とする. つまり次の不等式が成り立つ.

$$u(y) \leq u(x) + \langle p, y - x \rangle \quad \text{for } \forall y \in \bar{\Omega} \quad (7)$$

$x \in \partial\Omega$ ならば, $\max_{\bar{\Omega}} u < \max_{\partial\Omega} u + r \text{diam}(\Omega)$ となり, r の定義に矛盾する. よって, $x \in \Omega$ であるので, $p = Du(x)$ が導かれる. つまり, $B_r \subset Du(\Gamma_r[u])$ が成り立つ. 逆に, 微分の一意性から, $x \in \Gamma_r[u]$ に対し, $Du(x) \in B_r$ となるので, $B_r = Du(\Gamma_r[u])$ を得る.

ω_n を n 次元単位球体積とすると, 次のように変形できる.

$$\omega_n r^n = \int_{B_r} d\xi = \int_{Du(\Gamma_r[u])} d\xi \leq \int_{\Gamma_r[u]} |\det D^2 u(x)| dx \quad (8)$$

最後の不等式は, $\det D^2 u$ が退化していなければ, 等式で成立するが, 退化している可能性があるので Area 公式 (例えば, [7] を参照) を用いると, この不等式が成り立つ.

ところで, $x \in \Gamma[u]$ では, (7) と u の 2 次の Taylor 展開から $D^2 u(x) \leq O$ がわかる. よって, $D^2 u(x)$ の固有値 $\{\nu_1(x), \dots, \nu_n(x)\}$ はすべて非正である. つまり, $|\det D^2 u(x)| = (-\nu_1(x)) \times \dots \times (-\nu_n(x))$ となる. 相加相乗平均の不等式より,

$$|\det D^2 u(x)| \leq \left(-\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \right)^n \quad (9)$$

が導かれる. $D^2 u(x)$ を対角化する直交行列 $O(x)$ を考える (つまり, $O(x) D^2 u(x) O(x)^T = (\nu_i(x) \delta_{ij})$ とする). ここで, $O(x) = (o_{ij}(x))$ とおき, $\text{Tr}(A(x) D^2 u(x))$ を次のように変形する.

$$\text{Tr}(A(x) D^2 u(x)) = \sum_{i,j,k=1}^n a_{ij}(x) o_{kj}(x) \nu_k(x) o_{ki}(x) = \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) o_{ki}(x) o_{kj}(x)$$

ここで, $\nu_k(x) \leq 0$ ($1 \leq k \leq n$) と $O(x) O(x)^T = (\delta_{ij})$ を思い出し, 一様楕円性 (5) を用いて, 次の不等式を得る.

$$\text{Tr}(A(x) D^2 u(x)) \geq \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \lambda \sum_{i=1}^n o_{ki}(x)^2 = \lambda \sum_{k=1}^n \nu_k(x) \quad (10)$$

よって, (10), (9) と合わせ, (8) に代入して次の評価を得る.

$$\omega_n r^n \leq \frac{1}{(n\lambda)^n} \int_{\Gamma_r[u]} \{-\text{Tr}(A(x) D^2 u(x))\}^n dx \leq \frac{1}{(n\lambda)^n} \|f^+\|_{L^n(\Gamma_r[u])}^n$$

$\Gamma_r[u] \subset \Gamma[u]$ に注意して整理すると, 次の不等式が導かれる.

$$\max_{\bar{\Omega}} u - \max_{\partial\Omega} u = r \leq \frac{\text{diam}(\Omega)}{n\lambda\omega_n^{1/n}} \|f^+\|_{L^n(\Gamma[u])} \quad \square$$

注意 命題 2 の結論は, 右辺の積分領域を次で置き換えても成立する.

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega \mid u(x) > \max_{\partial\Omega} u\}$$

実際、 $\Omega_0 = \emptyset$ ならば自明なので、 Ω_0 は空でない開集合としてよい。 $v(x) := u(x) - \max_{\partial\Omega} u$ とおくと、(4) を満たす事がわかる。 $v(x) = 0$ ($\forall x \in \partial\Omega_0$) に注意して、命題 2 より

$$\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\Omega_0} v \leq C_0 \text{diam}(\Omega_0) \|f^+\|_{L^n(\Gamma[v; \Omega_0])}$$

が成り立つ。 よって、 Ω_0 に置き換えた方が積分値は大きくなる。 同様の注意は、以下の定理や命題でも成立する。

次に、(4) に、一階微分項がある場合を考える。

$$-\text{Tr}(A(x)D^2u(x)) + \langle b(x), Du(x) \rangle \leq f(x) \quad \text{in } \Omega \quad (11)$$

ここで、 $b = (b_1, \dots, b_n) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ はベクトル値関数であり、 $|b| := \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$ とする。 以降、簡単のため $\|b\|_n := \|b\|_{L^n(\Omega)}$ と書く。

定理 3 (5) と $f, |b| \in L^n(\Omega)$ を仮定する。 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ が (11) を満たすならば、次の不等式が成り立つ定数 $C_1 = C_1(n, \lambda, \|b\|_n) > 0$ が存在する。

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u + C_1 \text{diam}(\Omega) \|f^+\|_{L^n(\Gamma[u])}$$

証明 定理 2 の証明で、(8) の手前までは同じである。 $\kappa := \|f^+\|_{L^n(\Gamma[u])}^n$ とおく。 ($\kappa = 0$ の時は、 $\kappa > 0$ として、最後に $\kappa \rightarrow 0$ とすればよい)

まず、Area 公式を適用して、次の不等式が成り立つ事に注意する。

$$\int_{B_r} \frac{1}{\kappa + |\xi|^n} d\xi \leq \int_{\Gamma_r[u]} \frac{|\det D^2u(x)|}{\kappa + |Du(x)|^n} dx \leq \frac{1}{(n\lambda)^n} \int_{\Gamma_r[u]} \frac{\{-\text{Tr}(A(x)D^2u(x))\}^n}{\kappa + |Du(x)|^n} dx \quad (12)$$

n 次元単位球の表面積が $n\omega_n$ になる事に注意して、(12) の左辺を次のように変形する。

$$\int_{B_r} \frac{1}{\kappa + |\xi|^n} d\xi = n\omega_n \int_0^r \frac{s^{n-1}}{\kappa + s^n} ds = n\omega_n \log \left(1 + \frac{r^n}{\kappa} \right)$$

右辺に (11) を使って、次の不等式を得る。

$$\log \left(1 + \frac{r^n}{\kappa} \right) \leq \frac{1}{\omega_n n^{n+1} \lambda^n} \int_{\Gamma_r[u]} \frac{\{|b(x)| |Du(x)| + f^+(x)\}^n}{\kappa + |Du(x)|^n} dx \quad (13)$$

$\alpha, \beta \geq 0$ に対し、 $(\alpha + \beta)^n \leq 2^{n-1}(\alpha^n + \beta^n)$ に注意し、 κ の定義を思い出せば、右辺の積分より次式の方が大きいので、置き換える事ができる。

$$2^{n-1} \left(\int_{\Gamma_r[u]} |b(x)|^n dx + 1 \right) \leq 2^{n-1} (\|b\|_n^n + 1)$$

よって、(13) の両辺を e の肩に乗せると次の不等式を得る。

$$1 + \frac{r^n}{\kappa} \leq A := \exp \left(\frac{2^{n-1}}{\omega_n n^{n+1} \lambda^n} (\|b\|_n^n + 1) \right)$$

$A > 1$ に注意し、 κ の定義を思い出し変形すると次の評価が導かれる。

$$r \leq (A - 1)^{\frac{1}{n}} \|f^+\|_{L^n(\Gamma[u])}$$

r の定義に戻れば、次の評価を得る。

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u + (A - 1)^{\frac{1}{n}} \text{diam}(\Omega) \|f^+\|_{L^n(\Gamma[u])} \quad \square$$

4. ABP 最大値原理 (放物型)

放物型方程式に対する ABP 最大値原理は, Krylov によって初めて示され ([15]), 以下に述べる放物型版の上接集合を用いた結果は, Tso によって得られた ([17]).

$T > 0$ を固定し, $u : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$ に対し, 次の不等式を考える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \text{Tr}(AD^2u) + \langle b, Du \rangle \leq f \quad \text{in } \Omega \times (0, T] \quad (14)$$

以降, $t > 0$ に対し, $Q_t := \Omega \times (0, t)$ と書き, A, b, f の変数は $(x, t) \in \bar{Q}_T$ とする.

$A = A(x, t)$ は, 次の一様楕円性を満たすとする.

$$\exists \lambda > 0 \text{ such that } \langle \xi A(x, t), \xi \rangle \geq \lambda |\xi|^2 \quad \text{for } \forall (x, t) \in \bar{Q}_T, \xi \in \mathbf{R}^n \quad (15)$$

放物型の場合, 上接集合に修正が必要である. 関数 $u : \bar{Q}_T \rightarrow \mathbf{R}$ と $r > 0$ に対し,

$$\Pi_r[u] := \{(x, t) \in Q_T \mid \exists p \in \bar{B}_r \text{ such that } u(y, s) \leq u(x, t) + \langle p, y - x \rangle \text{ for } (y, s) \in \bar{Q}_t\}$$

とし, $\Pi[u] := \bigcup_{r>0} \Pi_r[u]$ とおく. (ここでも, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は n 次元のユークリッド内積である)

まず, 簡略化した記号を導入する. $u \in C^2(\bar{Q}_T)$ に対し,

$$u_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u_{ij} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{it} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial t}$$

等と書く. i, j は, $1, 2, \dots, n$ を表し, t だけ特別な役割である. $Du := (u_1, \dots, u_n)$ とし, t 微分を含む場合は, 次のように書く.

$$\nabla u := (u_1, \dots, u_n, u_t)^T$$

補題 4 $u \in C^2(Q_T)$ と $a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し, 写像 $\Phi : Q_T \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$\Phi(x, t) := (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t), u(x, t) - \langle Du(x, t), x - a \rangle)$$

とすると, $\det \nabla \Phi(x, t) = u_t(x, t) \det D^2 u(x, t)$ が成り立つ. 但し, $\nabla \Phi$ は次で定める.

$$\nabla \Phi(x, t) := \begin{pmatrix} u_{11}(x, t) & \cdots & u_{n1}(x, t) & (u(x, t) - \langle Du(x, t), x - a \rangle)_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{1n}(x, t) & \cdots & u_{nn}(x, t) & (u(x, t) - \langle Du(x, t), x - a \rangle)_n \\ u_{1t}(x, t) & \cdots & u_{nt}(x, t) & (u(x, t) - \langle Du(x, t), x - a \rangle)_t \end{pmatrix}$$

証明 $n+1$ 列の計算をしておく. ($1 \leq i \leq n$)

$$(u - \langle Du, x - a \rangle)_i = -\langle Du_i, x - a \rangle, \quad (u - \langle Du, x - a \rangle)_t = u_t - \langle Du_t, x - a \rangle$$

線形代数で, 行列式の値を変えない変形方法を思い出そう. 各 $j \in \{1, \dots, n\}$ に対し, $\nabla \Phi(x, t)$ の j 列に $x_j - a_j$ をかけて, $n+1$ 列目に加えた行列は,

$$\begin{pmatrix} u_{11}(x, t) & \cdots & u_{n1}(x, t) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{1n}(x, t) & \cdots & u_{nn}(x, t) & 0 \\ u_{1t}(x, t) & \cdots & u_{nt}(x, t) & u_t(x, t) \end{pmatrix}$$

となる事がわかる. この行列の行列式と $\det \nabla \Phi(x, t)$ が等しいので, 証明が終わる. $\square$

さて, 放物型方程式に対する ABP 最大値原理を述べる. 簡単のため, $\|b\|_{n+1} := \|b\|_{L^{n+1}(Q_T)}$ と略す. また, Q_T の放物型境界を次のように定義する.

$$\partial_p Q_T := (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})$$

定理 5 (15) と $f, |b| \in L^{n+1}(Q_T)$ を仮定する. $u \in C^2(\overline{Q_T})$ が (14) を満たすならば, 次の不等式が成り立つ定数 $C_2 = C_2(n, \lambda, T, \|b\|_{n+1}, \text{diam}(\Omega)) > 0$ が存在する.

$$\max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\partial_p Q_T} u + C_2 \|f^+\|_{L^{n+1}(\Pi[u])}$$

証明 $m_0 := \max_{\partial_p Q_T} u$ とおき, $R := \max_{\overline{Q_T}} u - m_0 > 0$ の場合を考えればよい. よって, $R = u(a, t_0) - m_0$ を満たす $(a, t_0) \in \Omega \times (0, T]$ がある. $r_0 := \frac{R}{\text{diam}(\Omega)} > 0$ とおいて, $D \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ を次のように定める.

$$D := \{(\xi, h) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid |\xi| \leq r_0, \text{diam}(\Omega)|\xi| < h - m_0 < R\}$$

補題 4 の $\Phi : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を用いる. 次の包含関係が成り立つ事を示そう.

$$D \subset \Phi(\Pi_{r_0}[u]) \quad (16)$$

任意の $(\xi, h) \in D$ をとり, $P(y) := h + \langle \xi, y - a \rangle$ とおくと, $(y, t) \in \partial_p Q_T$ に対しては,

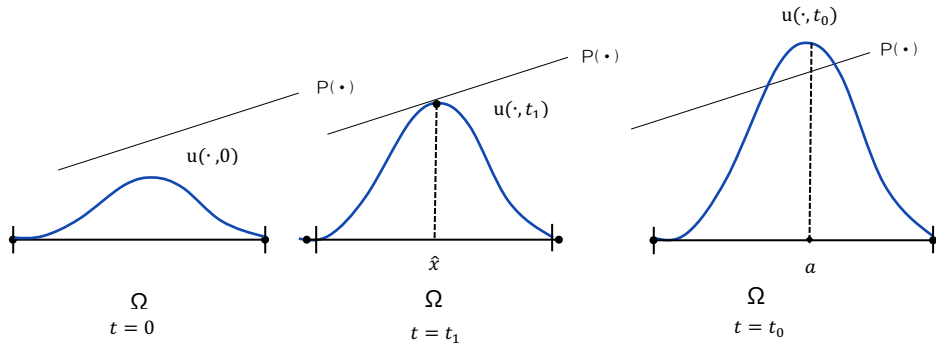
$$P(y) \geq h - |\xi||y - a| \geq h - |\xi|\text{diam}(\Omega) > m_0 \geq u(y, t)$$

が成り立つ. 一方, $P(a) = h < u(a, t_0)$ となる. 故に,

$$t_1 := \sup\{s > 0 \mid u(y, s) \leq P(y) \ (\forall y \in \Omega)\}$$

とおくと, $t_1 \in (0, t_0)$ となる事に注意する. すると, 次の性質を満たす $\hat{x} \in \Omega$ がある.

$$u(\hat{x}, t_1) = P(\hat{x}), \quad u(y, s) \leq P(y) \quad \text{in } \overline{Q_{t_1}}$$



《 t_1 で超平面が初めて接する事を表す図 》

よって、次の不等式が成り立つので、 $(\hat{x}, t_1) \in \Pi_{r_0}[u]$ となる。

$$u(y, s) \leq u(\hat{x}, t_1) + \langle \xi, y - \hat{x} \rangle \quad \text{for } (y, s) \in \overline{Q}_{t_1}$$

ここで $s = t_1$ とおくと、 $\xi = Du(\hat{x}, t_1)$ が得られ、 $h = u(\hat{x}, t_1) - \langle Du(\hat{x}, t_1), \hat{x} - a \rangle$ が成り立つ。よって、 $(\xi, h) = \Phi(\hat{x}, t_1) \in \Phi(\Pi_{r_0}[u])$ となり、(16) が示せた。

Case 1: $b \equiv (0, \dots, 0)$ の場合 (16) と Area 公式から

$$\int_D d\xi dh \leq \int_{\Phi(\Pi_{r_0}[u])} d\xi dh \leq \int_{\Pi_{r_0}[u]} |\det \Phi(x, t)| dx dt$$

を得る。以下の計算では、 u, f, A, b の変数 (x, t) は略す。左辺は、次のように変形できる。

$$\text{左辺} = \int_{B_{r_0}} \int_{\text{diam}(\Omega)|\xi|+m_0}^{R+m_0} dh d\xi = n\omega_n \int_0^{r_0} r^{n-1} (R - \text{diam}(\Omega)r) dr = \frac{\omega_n R^{n+1}}{(n+1)\text{diam}(\Omega)^n}$$

一方、右辺は補題 4 から次のように評価できる。

$$\text{右辺} \leq \int_{\Pi_{r_0}[u]} u_t |\det D^2 u| dx dt \leq \int_{\Pi_{r_0}[u]} \left(\frac{u_t - \text{Tr} D^2 u}{n+1} \right)^{n+1} dx dt$$

命題 2 の証明と同様に、この右辺は次の式で上から評価できる。

$$\int_{\Pi_{r_0}[u]} \left(\frac{\lambda u_t - \text{Tr}(AD^2 u)}{\lambda(n+1)} \right)^{n+1} dx dt$$

よって、 $\Pi_{r_0}[u]$ 上では、 $\text{Tr}(AD^2 u) \leq 0$ と $u_t \geq 0$ に注意して、 $\lambda_0 := \min\{1, \lambda\} > 0$ とおけば、これらを合わせて次の不等式が導かれる。

$$\frac{\omega_n R^{n+1}}{(n+1)\text{diam}(\Omega)^n} \leq \frac{1}{\{(n+1)\lambda_0\}^{n+1}} \int_{\Pi_{r_0}[u]} \{u_t - \text{Tr}(AD^2 u)\}^{n+1} dx dt$$

ここで、右辺に (14) を代入して次のように変形できる。

$$\max_{\overline{Q}_T} u - \max_{\partial_p Q_T} u = R \leq \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\text{diam}(\Omega)^n}{\omega_n(n+1)^n} \right)^{\frac{1}{n+1}} \|f^+\|_{L^{n+1}(\Pi[u])}$$

Case 2: $b \not\equiv (0, \dots, 0)$ の場合 定理 3 と同様、少し修正が必要になる。 $\kappa := \|f^+\|_{L^{n+1}(\Pi[u])}^{n+1}$ とおき、 $\kappa > 0$ としてよい。

$$\begin{aligned} \int_D \frac{1}{\kappa + |\xi|^{n+1}} d\xi dh &\leq \frac{1}{\{(n+1)\lambda_0\}^{n+1}} \int_{\Pi_{r_0}[u]} \frac{\{u_t - \text{Tr}(AD^2 u)\}^{n+1}}{\kappa + |Du|^{n+1}} dx dt \\ &\leq \frac{2^n}{\{(n+1)\lambda_0\}^{n+1}} \int_{\Pi_{r_0}[u]} \frac{|b|^{n+1} |Du|^{n+1} + (f^+)^{n+1}}{\kappa + |Du|^{n+1}} dx dt \\ &\leq \frac{2^n}{\{(n+1)\lambda_0\}^{n+1}} (\|b\|_{n+1}^{n+1} + 1) \end{aligned}$$

この左辺の変形をしよう。

$$\text{左辺} = n\omega_n \text{diam}(\Omega) \int_0^{r_0} \frac{r_0 r^{n-1} - r^n}{\kappa + r^{n+1}} dr$$

ここで、次を満たすように $c_0 > 0$ がとれれば、

$$\kappa + r^{n+1} \leq c_0 \left(\kappa + \frac{r_0}{n} r^n - \frac{1}{n+1} r^{n+1} \right) \quad (0 \leq r \leq r_0) \quad (17)$$

左辺より、次の値の方が小さい事がわかる。

$$\frac{n\omega_n \text{diam}(\Omega)}{c_0} \log \left(1 + \frac{r_0^{n+1}}{n(n+1)\kappa} \right)$$

(17) は、簡単な計算から $c_0 = n(n+1)$ とおけばよい事がわかる。故に、

$$\log \left(1 + \frac{r_0^{n+1}}{n(n+1)\kappa} \right) \leq A := \frac{2^n (\|b\|_{n+1}^{n+1} + 1)}{(n+1)^n \lambda_0^{n+1} \omega_n \text{diam}(\Omega)}$$

となるので、両辺を e の肩にのせて整理すると次のように評価できる。

$$r_0 \leq \{n(n+1)(e^A - 1)\}^{\frac{1}{n+1}} \|f^+\|_{L^{n+1}(\Pi[u])}$$

r_0 の定義に戻れば、証明が終わる。□

5. 応用・一般化

ABP 最大値原理の顕著な応用としては、非発散型 2 階一様楕円型・放物型方程式の弱解 (粘性解) の Harnack 不等式および, Calderón-Zygmund 評価がある。Harnack 不等式の証明には対数変換を用いる方法と、分布関数の減衰度を導く事で、積分可能性を得て弱 Harnack 不等式を示す方法がある。前者は、1 階微分の係数 b に強い積分可能性 (楕円型の場合、 $|b| \in L^{2n}(\Omega)$) を必要とするため少し弱い結果になる。

また、 p が次元 n より少し小さい時の $f \in L^p(\Omega)$ の場合にも Escauriaza による Pucci 方程式の強解の存在定理 ([6]) を利用して、非有界係数 b の場合にも ABP 最大値原理は一般化されている ([11])。更に、1 階微分項が一次以上の増大度の時も ABP 最大値原理や Harnack 不等式が成立するための十分条件が得られている ([12],[13],[14])。また、1 階微分項が一次増大以上ならば ABP 最大値原理が成り立たない反例がある ([12])。

最近、 p -Laplace 作用素 ([5],[9], [10]) や ∞ -Laplace 作用素 ([4])、更に分数冪 Laplace 作用素 ([8]) の場合にも ABP 最大値原理は一般化されている。

ここでは、 p -Laplace 作用素を含む簡単な場合を述べておく (cf. [5])。 $p > 1$ を固定し、 $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ と $n \times n$ 実対称行列 X に対し、次のように定める。

$$M_p(\xi, X) := \text{Tr} \left\{ \left(I + (p-2) \frac{\xi \otimes \xi}{|\xi|^2} \right) X \right\}$$

$\nu_p := \min\{p-2, 0\} + 1 > 0$ とおくと、 $X \leq O$ ならば、 $M_p(\xi, X) \leq \nu_p \text{Tr} X$ となることに注意する。

よく知られた p -Laplace 作用素は、 $\Delta_p u = |Du|^{p-2} M_p(Du, D^2 u)$ で与えられる。

命題 6 $f \in L^n(\Omega)$ を仮定する。 $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ が

$$-\Delta_p u \leq f \quad \text{in } \Omega$$

を満たすならば、次の不等式が成り立つ定数 $C_3 = C_3(n, p) > 0$ が存在する。

$$\max_{\Omega} u \leq \max_{\partial\Omega} u + C_3 \text{diam}(\Omega) \|f^+\|_{L^n(\Gamma[u])}^{\frac{1}{p-1}}$$

参考文献

- [1] A. D. Aleksandrov, Majorization of solutions of second-order linear equations, *Vestnik Leningrad Univ.*, 21, 5-25, (1966); English Translation in *Amer. Math. Soc. Transl.*, 68, 120-143, (1968).
- [2] I. Bakel'man, Theory of quasilinear elliptic equations, *Siberian Math. J.*, 2, 179-186, (1961).
- [3] L. A. Caffarelli, Interior a priori estimates for solutions of fully non-linear equations, *Ann. Math. (2)*, 130 (1), 189-213, (1989).
- [4] F. Charro, G. De Philippis, A. Di Castro and D. Máximo, On the Aleksandrov-Bakelman-Pucci estimate for the infinity Laplacian, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 48 (3-4), 667-693, (2013).
- [5] G. Dávila, P. Felmer and A. Quaas, Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate for singular or degenerate fully nonlinear elliptic equations, *C. R. Acad. Paris, Ser I*, 347, 1165-1168, (2009).
- [6] L. Escauriaza, $W^{2,n}$ a priori estimates for solutions to fully non-linear equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 42 (2), 413-423, (1993).
- [7] L. C. Evans and R. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Math., 1992.
- [8] N. Guillen and R. W. Schwab, Aleksandrov-Bakelman-Pucci type estimates for integro-differential equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 206 (1), 111-157, (2012).
- [9] C. Imbert, Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and Harnack inequality for degenerate/singular fully non-linear elliptic equations, *J. Differential Equations*, 250 (3), 1553-1574, (2010).
- [10] T. Junges Miotto, The Aleksandrov-Bakelman-Pucci estimates for singular fully nonlinear operators, *Comm. Contemp. Math.*, 12 (4), 607-627, (2010).
- [11] S. Koike and A. Świąch, Maximum principle for fully nonlinear equations via the iterated comparison function method, *Math. Ann.*, 339 (2), 461-484, (2007).
- [12] S. Koike and A. Świąch, Weak Harnack inequality for fully nonlinear uniformly elliptic PDE with unbounded ingredients, *J. Math. Soc. Japan*, 61 (3), 723-755, (2009).
- [13] S. Koike and A. Świąch, Existence of strong solutions of Pucci extremal equations with superlinear growth in Du , *J. Fixed Point Theory Appl.*, 5 (2), 291-304, (2009).
- [14] S. Koike and A. Świąch, Local maximum principle for L^p -viscosity solutions of fully nonlinear elliptic PDEs with unbounded coefficients, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11 (5), 1897-1910, (2012).
- [15] N. V. Krylov, Sequences of convex functions and estimates of the maximum of the solution of a parabolic equation, *Siberian Math. J.*, 17 (2), 226-236, (1976).
- [16] C. Pucci, Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 74, 15-30, (1966).
- [17] K. Tso, On an Aleksandrov-Bakelman type maximum principle for second-order parabolic equations, *Comm. Partial Differential Equations*, 10 (5), 543-553, (1985).