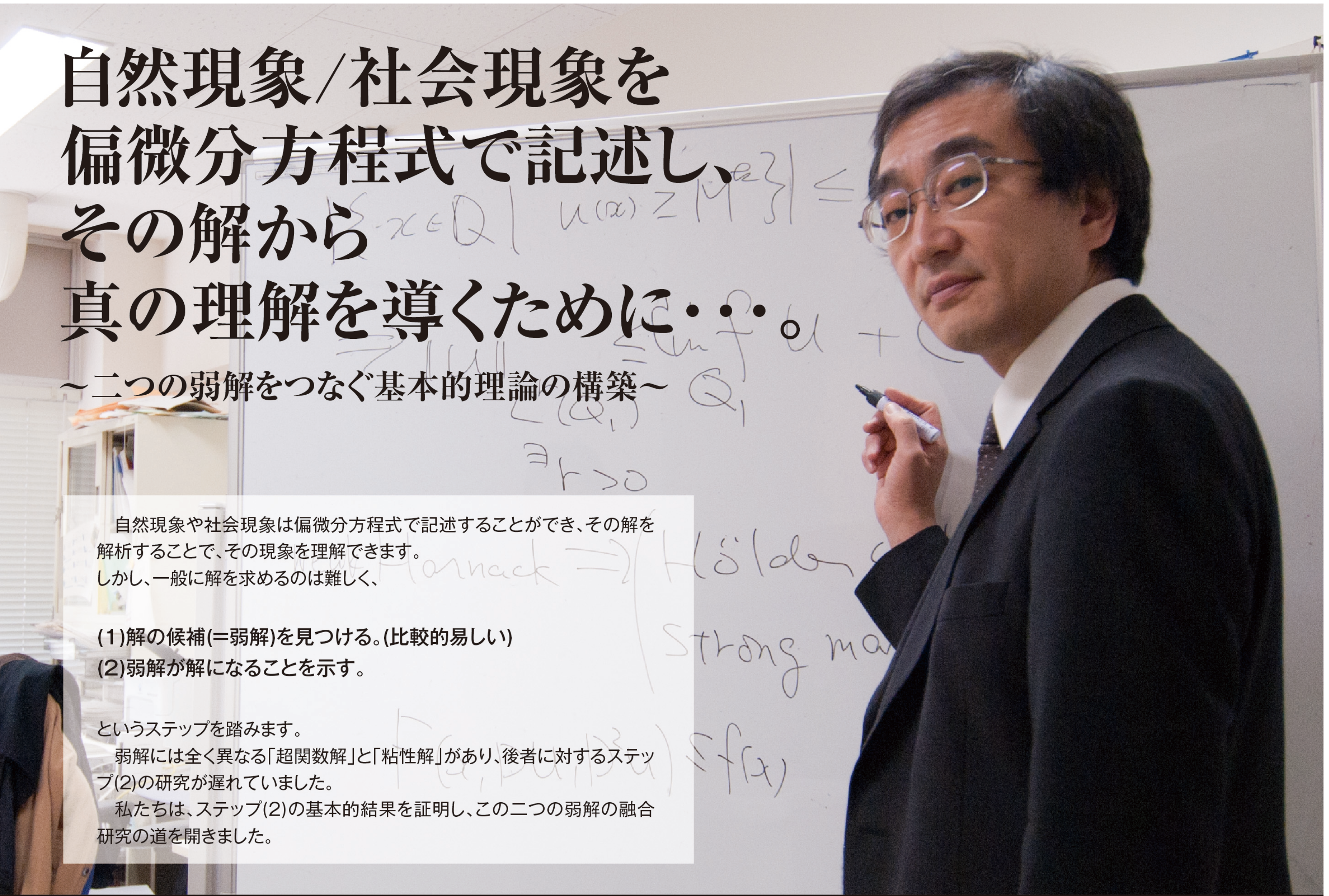


# 自然現象/社会現象を偏微分方程式で記述し、その解から真の理解を導くために・・・。

## ～二つの弱解をつなぐ基本的理論の構築～

自然現象や社会現象は偏微分方程式で記述することができ、その解を解析することで、その現象を理解できます。
しかし、一般に解を求めるのは難しく、

(1)解の候補(=弱解)を見つける。(比較的易しい)
(2)弱解が解になることを示す。

というステップを踏みます。
弱解には全く異なる「超関数解」と「粘性解」があり、後者に対するステップ(2)の研究が遅れていました。
私たちは、ステップ(2)の基本的結果を証明し、この二つの弱解の融合研究の道を開きました。

Process　研究のプロセス

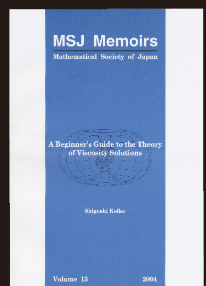
### 偏微分方程式の研究方法のプロセスの一例

1. 重要な偏微分方程式は簡単に解けないので、その近似解を見つける。
2. その偏微分方程式の近似解に対して、最大値原理が成立することを証明する。
3. 最大値原理を用いて、近似解がより良い性質を持つことを示す。
4. 近似解の極限が本当の解になるかどうかを確かめる。
5. 上の各プロセスは、簡単には解決できない。なぜ困難が起こるのか、その本質的原因は何か、解決は可能かどうかを熟考する。時には、本当の解は存在しないのではないかと疑う。更に視点を変え、弱解でも現象を理解できるのではと、新たな問題に取り組むこともある。

Profile
小池 茂昭　Shigeaki Koike
大学院理工学研究科　数理電子情報部門
教授

◎経歴
1981　早稲田大学理工学部物理学科卒業
1988　同大学院数学科博士前期・後期課程修了
1989　理学博士(早稲田大学)
1988～1989　早稲田大学理工学部助手
1989～1992　東京都立大学理学部助手
1992～2002　埼玉大学理学部助教
2002　同教授～現在に至る

著書「A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions」日本数学会 2004年　現在第2版をHPで無料展示
理系の数学2「微分積分」数学書房　2010年など




## ■ 研究内容

偏微分方程式は、多変数の微分(=偏微分)を含む方程式であり、自然科学だけでなく社会科学のさまざまな現象を表すことができます。しかし、その解は具体的に解けるものがほとんどなく、「解が存在すること」を示すことから始まります。一方、困ったことに「解が存在すること」を示すこと自体、極めて難しいことが多いのです。

そこで、比較的見いだしやすい「解の候補(=弱解)」を見つけて、それが本当の解になることを示すという方法が用いられます。その「弱解」のうちで、物理学におけるエネルギー最小化原理から導かれる偏微分方程式は、「超関数」と呼ばれる弱解が適切であり、古く(約60年前)から研究されてきました。

他方、工学や経済学にも最小化問題があり、ダイナミック・プログラミング原理(動的計画原理)を通して導かれる偏微分方程式には超関数の理論が使えないために、研究が進んでいませんでした。しかし、1980年代初頭に導入された粘性解が、これらの偏微分方程式の適切な弱解であることが分かってきました。

↓

私の研究は、上記の二つの全く性質の異なる弱解に対して、弱解が真の解になることを示すための共通の技術を開発することです。
私の開発した「道具」のひとつに「最大値原理」があります。これをやさしく言うと、[関数 u が最大値を取る点 x では、u'(x)=0 と u''(x)≦0 が成り立つ]ことを利用して得た関係式ということになります。

例えば、
u"(x)≦0ならば上に凸な関数です。つまり、
−1<x<1でu"(x)≦0であり、
u(±1)=0ならば、関数のグラフを描いてみれば、
−1<x<1に対しu(x)≧0となることがわかります。u"(x)の値が非正でないと、u(±1)=0でもu(x)が非負とは限りません。
例えば、
u(x)=$x^2$−1は、u"(x)=2>0となるのでu(x)≧0になるとは限りません。実際u(0)=−1<0です。
−1<x<1でu"(x)≦f(x)となり、u(±1)=0の時、
−1<x<1ならば、u(x)≦"fに関係した数"
という不等式が成り立つことを「最大値の原理」と呼びます。
重要な点は、右辺の"fに関係した数"がuには無関係に選べることです。

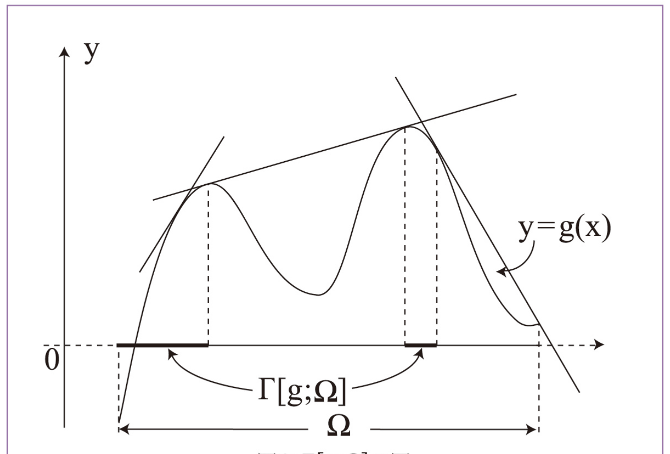


図2：Γ[g;Ω]の図

## ABP最大値原理

次を満たす $C_3>0$ が存在する．$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ を有界領域とする．

$$u\text{ は (2) の粘性劣解} \Longrightarrow \sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u^+ + C_3\mathrm{diam}(\Omega)\|f^+\|_{L^n(\Gamma[u^+;\Omega])}$$

**直感的証明**：簡単のため，$\mathrm{diam}(\Omega)=1$ と $u\in C^2$ を仮定する．更に，$r_0:=\sup_\Omega u-\sup_{\partial\Omega}u^+>0$ と仮定してよいので，$r:=r_0/2$ に対して，$\overline{B}_r\subset Du(\Gamma_r[u^+;\Omega])$ を示す．実際，任意の $p\in\overline{B}_r$ に対し，$x\in\overline{\Omega}\to u^+(x)-\langle p,x\rangle$ の最大点を $\hat{x}\in\overline{\Omega}$ とすると，

$$u^+(x)-u^+(\hat{x})\le\langle p,x-\hat{x}\rangle\le r\mathrm{diam}(\Omega)=r_0/2 \quad (\forall x\in\Omega) \tag{8}$$

となる．よって，$\hat{x}\in\partial\Omega$ とすると，$r_0>0$ に矛盾するので，$\hat{x}\in\Omega$ と仮定してよい．更に，$u(\hat{x})\le 0$ とすると (8) の左辺が非負なので $p=0$ となり，再び (8) から $u(x)\le 0$ $(\forall x\in\Omega)$ となり $r_0>0$ に矛盾する．故に，$u(\hat{x})>0$ としてよい．以上の考察から，$p\in Du(\Gamma_r[u^+;\Omega])$ となる．
$r_0>0$ に注意すると，図 2 から $\Gamma_r[u^+;\Omega]\subset\{x\in\Omega \mid u(x)>0\}$ が分かる．よって，変数変換の公式を用いると

$$|B_r|\le\int_{\Gamma_r[u^+;\Omega]}|\det(D^2u)|dx\le\int_{\Gamma[u^+;\Omega]}|\det(D^2u)|dx$$

が導かれる．$\Gamma[u^+;\Omega]$ 上では，$D^2u\le 0$ となるので，

$$|\det(D^2u)|\le|-\mathrm{trace}(D^2u)/n|^n\le C_4\mathcal{P}^-(D^2u)^n\le C_4(f^+)^n$$

が得られるので，次が成り立つ．ただし，$\omega_n$ は $n$ 次元単位球体積．

$$\omega_n r^n=|B_r|\le C_4\int_{\Gamma[u^+;\Omega]}(f^+)^n dx$$

よって，$r$ の定義に戻れば証明が終わる．(「数学」第 62 巻 (2010 年) より)

## 今回のブレークスルーを実現した背景

鍵となったアイディアは私が見つけたというより、「既に埋まっていた」といった方が正確かも知れません。つまり、全く新しいユニークなものというよりは、元になるアイディアが別の形で単純に使われていて、それが「ここで使える」ことに気づいたのです。しかしそれは、偶然としか言いようが無いものでした。数学の研究では、このようなことがしばしば起こります。つまり本当に素晴らしいアイディアは遥か昔に先人が準備してくれていたように思えるのです。

もう少し具体的に、でも抽象的ですが、説明しましょう。適切な関数を見つけて方程式を単純化したかったのですが、既知の関数を使うと「誤差」(ごみ!)がでてしまう――という悩みがあったのです。普通はここで諦めてしまうのでしょうが、この「誤差」を子細に見ていくと意外と「小さい」ことが分かりました。そこで、この「誤差」を消すために、別の関数を使って方程式を変形すると、また「誤差」がでてしまうのです。ところが、これはさらに小さくて、よく調べると有限回の変形で、きれいに誤差が無くなることがわかりました。そこで、これを「逐次比較関数法」と名づけました。