完全非線形楕円型偏微分方程式の L^p 粘性解について

On L^p-viscosity solutions of fully nonlinear elliptic PDEs

小池　茂昭　　　　(埼玉大学)
Shigeaki Koike　(Saitama University)

本講演では、完全非線形 2 階一様楕円型偏微分方程式の弱解「L^p 粘性解」の基礎理論を紹介する。また、1 階微分項の係数が非有界な可能性がある冪乗可積分関数の場合等の最近の結果にも言及する。

1．序

1980 年代初頭に、M. G. Crandall と P.-L. Lions [14] が、非発散型 1 階偏微分方程式の適切な弱解として**粘性解** (viscosity solutions) を導入した。その後、Lions, R. Jensen, H. Ishii 等の研究により、非発散型 (**退化**)2 階楕円型方程式に対しても粘性解が適切な弱解であることが確かめられた。その後の粘性解理論の展開とその応用は Crandall-Ishii-Lions の [10] を参照してほしい。

1989 年に、[6] で L. A. Caffarelli は完全非線形 2 階**一様**楕円型方程式の “弱解” に対し、L^p 評価と Schauder 評価を示した。但し、2 階微分の “係数” に各点での連続性は仮定しない。一方、連続係数の場合には、N. S. Trudinger による粘性解の Schauder 型評価等の研究がある ([52, 53, 54, 55])。

本講演では、Evans-Krylov 評価 ([17, 18, 37]) と呼ばれる完全非線形方程式の弱解の Schauder 評価に関しては触れない。興味のある方は、[6, 7] や拙文 [28] を参照してほしい。

1996 年に Caffarelli の研究 [6] をもとに、Caffarelli, Crandall, M. Kocan, A. Święch は [8] において、L^p 粘性解の概念を導入した。Crandall-Lions による通常の粘性解との違いは、“テスト関数” として C^2 関数の代わりに $W^{2,p}$ 関数を用いる点である。実際、非斉次項が L^p 関数の方程式を扱うために、様々な局面で、対応する Pucci 方程式 (extremal 方程式とも呼ぶ) の解をテスト関数として採用する必要がある。しかし、その解は $W^{2,p}$ 関数であり、C^2 となる事は期待でない。これが、L^p 粘性解の概念が自然に導入された理由の一つである。

通常の粘性解の理論では、比較原理 (一意性定理) が中心的話題であったが、L^p 粘性解では、後述の例 (Ex1) において 2 階微分の係数に連続性を仮定しないので、一意性は一般に期待できない。実際、N. Nadirashvili [40] は反例をあげた ([47] も参照)。(条件をつけて L^p 粘性解の一意性を得たものに [26] がある。)

L^p 粘性解の存在に関する結果には [11, 29, 48] がある。最近の固有値問題に関しては [46, 20]、方程式系への一般化は [3, 49, 45] がある。また、完全非線形放物型

方程式の結果は、[56, 13, 9] 等で扱っている。最後に強解に関しては、[23, 39, 37] を引用しておく。

2．準備

次の完全非線形 2 階偏微分方程式を考える。

$$F(x, Du, D^2u) = f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{E}$$

ここで、$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ は有界領域で、簡単のため $\partial\Omega$ は滑らかとする。本講演では主に最大値原理を扱うので、F は未知関数 u 自体には依存しないと仮定する。

以降、次の一様楕円性定数を固定する。

$$0 < \lambda \leq \Lambda$$

次の条件が完全非線形版の一様楕円性である。

$$\begin{gathered}\mathcal{P}^-(X-Y) \leq F(x,\xi,X) - F(x,\xi,Y) \leq \mathcal{P}^+(X-Y) \\ (\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^n, X, Y \in S^n)\end{gathered} \tag{A1}$$

ここで、S^n は $n \times n$ 実対称行列とし、Pucci 作用素 $\mathcal{P}^\pm : S^n \to \mathbf{R}$ は次で与える (cf. [44])。([7] 等では符号が違うので注意する。)

$$\mathcal{P}^+(X) := \max\{-\mathrm{trace}(AX) \mid A \in S^n, \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}$$

$$\mathcal{P}^-(X) := \min\{-\mathrm{trace}(AX) \mid A \in S^n, \lambda I \leq A \leq \Lambda I\}$$

$\lambda = \Lambda = 1$ の時は、次のようになる。(**マイナス**符号に注意！)

$$\mathcal{P}^\pm(D^2u) = -\triangle u$$

$\mathcal{P}^\pm$ の性質を述べておく。(iv) により、$\mathcal{P}^\pm$ は "ほぼ" 線形な作用素になる。

$$\begin{cases} (i) \quad \mathcal{P}^-(X) = -\mathcal{P}^+(-X) \\ (ii) \quad \mathcal{P}^\pm(\theta X) = \theta \mathcal{P}^\pm(X) \quad (\theta \geq 0) \\ (iii) \; \mathcal{P}^-(X) + \mathcal{P}^-(Y) \;\leq\; \mathcal{P}^-(X+Y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \leq\; \mathcal{P}^+(X) + \mathcal{P}^-(Y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \leq\; \mathcal{P}^+(X+Y) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \leq\; \mathcal{P}^+(X) + \mathcal{P}^+(Y) \end{cases}$$

一般性を失わず次の条件を仮定できる。

$$F(x, 0, O) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{A2}$$

実際、F と f を $F(x,\xi,X) - F(x,0,O)$ と $f(x) - F(x,0,O)$ で置き換えればよい。

1 階微分項には次を仮定する。但し、$L^p_+(\Omega)$ は非負 $L^p(\Omega)$ 関数全体する。

$$\exists \mu \in L^q_+(\Omega) \quad \text{s.t.} \quad |F(x,\xi,O)| \le \mu(x)|\xi|^m \quad (\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbf{R}^n) \tag{A3}$$

非斉次項 f は p 乗可積分性を仮定する。

$$f \in L^p(\Omega) \tag{A4}$$

仮定 $(A1, A2, A3, A4)$ を満たす典型的な方程式をあげておく。

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \mu_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x) \tag{Ex1}$$

但し、$\lambda|\eta|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \le \Lambda|\eta|^2$ $(\forall \eta \in \mathbf{R}^n, x \in \Omega)$、$\mu_i \in L^q(\Omega)$ とする。a_{ij} には連続性を (よって微分可能性も) 仮定しないので、この線形方程式ですら非発散型である。

確率最適制御に現れる次の Bellman 方程式は、左辺を F とおくと、$\forall x \in \Omega$ に対して、$(\xi, X) \to F(x,\xi,X)$ が凸になる場合である。

$$\max_{\alpha \in A}\left\{-\sum_{i,j=1}^n a^\alpha_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \mu^\alpha_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\} = f(x) \tag{Ex2}$$

但し、A は適当な添数集合とする。a^α_{ij} と μ^α_i はそれぞれ、例 (Ex1) の a_{ij} と μ_i が満たす仮定が成り立つとする。更に、同様に左辺が $\min_{\beta \in B}\max_{\alpha \in A}\{\cdots\}$ となる形の方程式を Isaacs 方程式と呼ぶ。その場合、対応する F は (ξ, X) に関し、一般には凸でも凹でもない。

仮定 (A1,A2,A3,A4) の下で、方程式 (E) に対し、次の Pucci 方程式が役に立つ。

$$\mathcal{P}^\pm(D^2u) \pm \mu(x)|Du|^m = f(x) \quad \text{in } \Omega.$$

実際、形式的に次のようになるからである。

$$F(x, Du, D^2u) \le f(x) \Longrightarrow \mathcal{P}^-(D^2u) - \mu(x)|Du|^m \le f(x)$$

$$F(x, Du, D^2u) \ge f(x) \Longrightarrow \mathcal{P}^+(D^2u) + \mu(x)|Du|^m \ge f(x)$$

本講演では、少なくとも次を仮定する。

$$p > \frac{n}{2}$$

また、次の記号を使う。

$$Q_r := \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right] \times \cdots \times \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right], \quad B_r := \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| < r\}$$

[8] の L^p 粘性解の定義を述べておく ([6, 7, 12, 25] も参照)。

定義　$u \in C(\Omega)$ が (E) の L^p **粘性劣解** (resp., L^p **粘性優解**)
$\Longleftrightarrow$　$\forall \phi \in W^{2,p}_{\rm loc}(\Omega)$ に対し、$u-\phi$ が $x \in \Omega$ で局所最大 (resp., 局所最小) を取ったとすると、次が成り立つ。

$$ess \liminf_{y \to x} \Big(F(y, D\phi(y), D^2\phi(y)) - f(y) \Big) \le 0$$

$$\left(\text{resp.,}\ \ ess \limsup_{y \to x} \Big(F(y, D\phi(y), D^2\phi(y)) - f(y) \Big) \ge 0 \right)$$

$u \in C(\Omega)$ が (E) の L^p **粘性解**
$\Longleftrightarrow$　$u \in C(\Omega)$ が (E) の L^p 粘性劣解かつ、L^p 粘性優解となること

次に、L^p 強解の定義を述べる。

定義　$u \in C(\Omega)$ が (E) の L^p **強劣解** (resp., L^p **強優解**)
$\Longleftrightarrow$　$u \in W^{2,p}_{\rm loc}(\Omega)$ かつ、次を満たす。

$$F(x, Du(x), D^2u(x)) \le f(x) \quad (\text{resp.,}\ \ge f(x)) \quad a.e.\ \text{in}\ \Omega.$$

$u \in C(\Omega)$ が (E) の L^p **強解**
$\Longleftrightarrow$　$u \in C(\Omega)$ が (E) の L^p 強劣解かつ、L^p 強優解であること

【注意】 $p < p'$ の時、次が成り立つ。(「解」を劣解・優解に置き換えても成立。)

$$\begin{array}{rcl} L^p\ \text{粘性解} & \Longrightarrow & L^{p'}\ \text{粘性解} \\ L^{p'}\ \text{強解} & \Longrightarrow & L^p\ \text{強解} \end{array}$$

不等式の向きを間違えないため、u が (E) の L^p 粘性劣解 (resp., L^p 強劣解) を

「$F(x, Du, D^2u) \le f(x)$ の L^p 粘性劣解 (resp., L^p 強劣解)」

と書く事もある。優解に関しても同様 (不等式の向きが逆)。

3. 既知の結果 (有界係数 $\mu \in L^\infty$ の場合)

L^p 強解・L^p 粘性解に関する既知の事実を列挙する。以下、Aleksandrov-Bakelman-Pucci は ABP と略す。ノルム $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ を $\|\cdot\|_p$ と略す事もある。d_Ω は Ω の直径、$\Gamma[u,\Omega]$ は u の Ω における次の上接集合 (upper contact set) とする。

$$\Gamma[u,\Omega] = \{ x \in \Omega \mid \exists p = p(x) \in \mathbf{R}^n \ \text{s.t}\ u(y) \le u(x) + \langle p, y-x \rangle \ \text{for}\ \forall y \in \Omega \}$$

定理A（ABP 最大値原理）([1, 2, 4, 23, 37, 51], [8])
<u>L^n 強解</u>　$\exists C_k > 0$ $(k = 0, 1)$ s.t. $\forall f \in L^n_+(\Omega), \mu \in L^n_+(\Omega)$ に対し、$u \in C(\overline{\Omega})$ が

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \mu(x)|Du| \le f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{P1-}$$

の L^n 強劣解ならば次が成り立つ。

$$\max_{\Omega} u \le \max_{\partial\Omega} u^+ + C_0 d_\Omega e^{C_1\|\mu\|^n_n}\|f\|_{L^n(\Gamma[u,\Omega])}$$

<u>L^n 粘性解</u>　(Caffarelli-Crandall-Kocan-Święch[8]) $\exists C_0 > 0$ s.t. $\forall f \in L^n_+(\Omega), \mu \in L^\infty_+(\Omega)$ に対し、$u \in C(\overline{\Omega})$ が (P1−) の L^n 粘性劣解ならば次が成り立つ。

$$\max_{\Omega} u \le \max_{\partial\Omega} u^+ + C_0 d_\Omega \|f\|_{L^n(\Gamma[u,\Omega])}$$

以下、領域 Ω の形状、次元 n、一様楕円性定数 λ, Λ に依存する $p_0 \in [\frac{n}{2}, n)$ を導入する（[16, 15] 参照)。

定理B（Pucci 方程式の L^p 強解の存在定理）(L. Escauriaza[16], [19, 23, 37, 8])
任意の $p > p_0$ に対し、定数 $\mu_\infty \ge 0$、連続関数 $\psi \in C(\partial\Omega)$ と $f \in L^p(\Omega)$ に対し、次の L^p 強解 $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ が存在する。

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathcal{P}^\pm(D^2u) \pm \mu_\infty|Du| &=& f(x) & \text{in } \Omega \\ u &=& \psi(x) & \text{on } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{P0}$$

更に、L^∞ 評価と L^p 評価が成り立つ。

$$-\max_{\partial\Omega}\psi^- - C_0\|f^-\|_p \le u \le \max_{\partial\Omega}\psi^+ + C_0\|f^+\|_p \quad \text{in } \Omega$$

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C_2(\max_{\partial\Omega}|\psi| + \|f\|_p)$$

【注意】 この定理の L^∞ 評価の $\|f^\pm\|_p$ は、$p_0 < p < n$ の場合は Ω 全体の積分である。通常、f の積分領域を上接集合とするものだけを ABP 最大値原理と呼ぶが、本講演ではこれらも ABP 最大値原理と呼ぶ。

最後に、L^p 評価を述べる (Caffarelli [6] , [7])。一般には、『“対応する” 定数係数の完全非線形方程式の弱解に “良い評価” がある』ならば、<u>適当な仮定の下</u>に変数係数でも L^p 評価ができるという結論である。『$\cdots$』を満たす典型的な方程式は、2 階微分に関して凸又は凹になる Pucci 方程式の場合である。『$\cdots$』を満たす方程式として、それ以外には [5] を挙げておく。又、興味深い regularity の反例は [41, 42] を参照せよ。

ここでは簡単のため、Pucci 方程式自体に対してのみ結論を述べる。

定理C（L^p 評価）(cf. [6, 7, 50, 57])
$\exists C_2 > 0$ s.t. $u \in C(\overline{\Omega})$ が (P0) の L^p 粘性解とするならば、次が成り立つ。

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_2(\max_{\partial\Omega} |\psi| + \|f\|_p)$$

4．最近の結果（非有界係数 $\mu \in L^q$ の場合）

ここでは、非有界係数 $\mu \in L^q$ $(n < q < \infty)$ の場合のŚwięch との一連の研究を紹介する。最初に、非有界係数の場合を研究したのは、P. Fok [21] である。

4.1　動機

1 階微分の係数に冪乗可積分関数を考える大きな動機は、もちろん「一般化」である。通常の超関数解や L^p 強解でできる regularity 理論をどこまで L^p 粘性解でできるか？という単純な疑問である。

もう一つの動機を述べるために、次の準線形非発散型方程式を考える。

$$-\sum_{i,j=1} a_{ij}(Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{QL}$$

簡単のため $\lambda|\eta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\xi)\eta_i\eta_j \leq \Lambda|\eta|^2$ $(\forall \eta, \xi \in \mathbf{R}^n)$ が成り立つとする。$a_{ij} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は Lipschitz 連続とする（これでも非発散型である）。

例えば、(QL) の解の存在を示すための標準的な方法として近似方程式の解の評価をして、近似解の極限が解である事を示す方法がある。しかし、極限が解である事を示すために “安定性” が必要になるが、対応する安定性を示すために L^p 関数が 1 階微分係数になる Pucci 方程式の ABP 最大値原理が必要なことがある ([35])。

4.2　$m = 1$（1 次増大）の場合

1 階微分の係数 $\mu \in L^q$ と非斉次項 $f \in L^p$ の冪に関して二つの場合を考える。

$$n \leq p \leq q, \quad n < q \tag{pq1}$$

$$p_0 < p < n < q \tag{pq2}$$

定理Aの L^n 強解に関する結果では $q = n$ で証明できるが、L^n 粘性解では (pq1) 又は (pq2) を仮定するので、残念ながら $q = n$ の場合は扱えない。

まず、ABP 最大値原理を述べる。

定理１（ABP 最大値原理）(K-Święch[32])
(pq1) の場合　$\exists C_k > 0$ $(k = 0, 1)$ s.t. $\forall f \in L^p_+(\Omega)$, $\forall \mu \in L^q_+(\Omega)$, $u \in C(\overline{\Omega})$ が

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \mu(x)|Du| \leq f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{P1$-$}$$

の L^p 粘性劣解ならば次が成り立つ。

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + C_0 e^{C_1\|\mu\|_n^n}\|f\|_{L^n(\Gamma[u,\Omega])}$$

<u>(pq2) の場合</u>　$\exists C_k > 0\ (k = 0, 1)$, $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ s.t. $\forall f \in L^p_+(\Omega)$, $\forall \mu \in L^q_+(\Omega)$, $u \in C(\overline{\Omega})$ が (P1−) の L^p 粘性劣解ならば次が成り立つ。

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + C_0 \left\{ e^{C_1\|\mu\|_n^n}\|\mu\|_q^{N_0} + \sum_{k=0}^{N_0-1} \|\mu\|_q^k \right\} \|f\|_p$$

【注意】$1 < p < n$ の時、$p^* = \frac{np}{n-p}$ とおく。$p_0 = p$ とし、$p_k := \frac{p^*_{k-1}q}{q+p^*_{k-1}}$ $(k \in \mathbf{N})$ とおくと $p_k < p_{k+1}$ が成り立つ。(pq2) の場合の N_0 は $\min\{k \in \mathbf{N} \mid p_k \geq n\}$ となる。

【注意】[21, 22] は、$q = p > n$ かつ μ が $\partial\Omega$ の近傍 N で $\mu \in L^{2n}(N)$ を仮定している。

定理２（弱 Harnack 不等式）(K-Święch[33], $q = \infty$ の時は K [27])
<u>(pq1) の場合</u>　$\exists r > 0$ s.t. $\mu \in L^q_+(Q_2)$, $f \in L^p_+(Q_2)$ に対し、$u \in C(Q_2)$ が

$$\mathcal{P}^+(D^2u) + \mu(x)|Du| \geq -f(x) \quad \text{in } Q_2 \tag{P1+}$$

の**非負** L^p 粘性優解ならば次が成り立つ。

$$\left(\int_{Q_1} u^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C_3 \left(\inf_{Q_1} u + \|f\|_{L^n(Q_2)}\right) \quad (\exists C_3 > 0)$$

<u>(pq2) の場合</u>　$\exists r > 0$ s.t. $\mu \in L^q_+(Q_2)$, $f \in L^p_+(Q_2)$ に対し、$u \in C(Q_2)$ が (P1+) の**非負** L^p 粘性優解ならば次が成り立つ。

$$\left(\int_{Q_1} u^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C_3 \left[\inf_{Q_1} u + \left\{ e^{C_1\|\mu\|_n^n}\|\mu\|_q^{N_0} + \sum_{k=0}^{N_0-1} \|\mu\|_q^k \right\} \|f\|_p \right] \quad (\exists C_3 > 0)$$

【注意】[21] は、$p > n$, $q = 2n$ かつ μ に連続を仮定している。

４．３　$m > 1$（1 次以上の増大）の場合

$m > 1$ の場合は、古典解でも ABP 最大値原理が成り立たない反例がある (K-Święch[31, 32])。しかし、係数 μ 又は f が “小さい” という条件下でなら成立する。
又、(pq2) の場合は余分な条件がつく。

定理１’（ABP 最大値原理）(K-Święch[32])
<u>(pq1) の場合</u>　$m > 1$ とする。$\exists \delta > 0, C_k > 0\ (k = 0, 1)$ s.t. $f \in L^p_+(\Omega)$ と $\mu \in L^q_+(\Omega)$ が $\|f\|_p^{m-1}\|\mu\|_p \leq \delta$ を満たし、$u \in C(\overline{\Omega})$ が

$$\mathcal{P}^-(D^2u) - \mu(x)|Du|^m \leq f(x) \quad \text{in } \Omega \tag{P$m-$}$$

の L^p 粘性劣解ならば次が成り立つ。

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ + C_4\|f\|_p \tag{1}$$

(pq2) の場合　$1 < m < \frac{n(q-p)}{q(n-p)}$ とする。$\exists\delta > 0, C_k > 0$ $(k = 0, 1)$ s.t. $f \in L^p_+(\Omega)$ と $\mu \in L^q_+(\Omega)$ が $\|f\|_p^{m-1}\|\mu\|_q \leq \delta$ を満たし、$u \in C(\overline{\Omega})$ が (P$m-$) の L^p 粘性劣解ならば (1) が成り立つ。

【注意】対応する放物型方程式では、$\mu \in L^\infty$ ならば、$m > 1$ でも $\|\mu\|_\infty$ や $\|f\|_p$ が小さいという条件なしで、ABP 最大値原理が成り立つ (K-Święch[32])。

弱 Harnack では、スケーリングを繰り返すため強い条件が必要になる。

定理２＇（弱 Harnack 不等式）(K-Święch[34], cf [36])
$1 < m < 2 - \frac{n}{q}$ とする。(pq1) 又は (pq2) を仮定する。$\forall M > 0$ に対し、$\exists\delta' > 0$ s.t. $f \in L^p_+(Q_2)$ と $\mu \in L^q_+(Q_2)$ が $\|\mu\|_q(1 + \|f\|_p^{m-1}) < \delta'$ を満たし、$u \in C(Q_2)$ が

$$\mathcal{P}^+(D^2u) + \mu(x)|Du|^m \geq -f(x) \quad \text{in } Q_2 \tag{P$m+$}$$

の L^p 粘性優解で $0 \leq u \leq M$ (in Q_2) を満たすならば、次が成り立つ。

$$\left(\int_{Q_1} u^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C_3\left(\inf_{Q_1} u + \|f\|_p\right) \quad (\exists C_3 > 0) \tag{2}$$

特に弱 Harnack 不等式を示す際に、$\mu(x)|Du|^m$ がついた Pucci 方程式の L^p 強解の次の存在定理が必要になる。

定理３＇（L^p 強解の存在定理）(K-Święch[34])
(pq1) 又は、(pq2) と $1 < m < \frac{n(q-p)}{q(n-p)}$ を仮定する。$\exists\delta > 0$ s.t. $f \in L^p(\Omega), \mu \in L^q(\Omega), \psi \in W^{2,p}(\Omega)$ が

$$\|\mu\|_q(\|f\|_p + \|\psi\|_{W^{2,p}(\Omega)})^{m-1} < \delta$$

を満たすならば、次の L^p 強解が存在する。

$$\begin{cases} \mathcal{P}^\pm(D^2u) \pm \mu(x)|Du|^m &= f(x) \quad \text{in } \Omega \\ u &= \psi(x) \quad \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

更に次を満たす。

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C_2\left(\|f\|_p + \|\psi\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right) \quad (\exists C_2 > 0)$$

4.4　応用

・Hölder 連続性　(K-Święch[33], cf. Sirakov [48]) $\Leftarrow$ 弱 Harnack 不等式
・境界付近での弱 Harnack 不等式　([33])
　$\Longrightarrow$ 非有界領域での最大値原理・Phragmén-Lindelöf の定理 (K-Nakagawa [30])
・L^p 強解の存在（K-Święch[33, 34]）
・強最大値原理　([33])
・局所最大値原理　(K-Święch[35], cf. [7, 24])
・L^p 強解ならば L^p 粘性解　([33])
・L^p 粘性解が $W^{2,p}$ に属するならば L^p 強解　([33], K. Nakagawa [43])

参考文献

[1] Aleksandrov, A. D., *Amer. Math. Soc. Transl.*, **68** (1963), 120–143.

[2] Bakelman, I., *Sibirsk. Mat. Ž.*, **2** (1961), 179–186.

[3] Busca, J. and B. Sirakov, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non-Lin.*, **21** (5) (2004), 543–590.

[4] Cabré, X., *Comm. Pure Appl. Math.*, **48** (1995), 539–570.

[5] Cabré, X. and L. A. Caffarelli, *J. Math. Pures Appl. (9)*, **82** (5) (2003), 573–612.

[6] Caffarelli, L. A., *Ann. Math.* **130** (1989), 189–213.

[7] Caffarelli, L. A. and X. Cabré, AMS, Providence, 1995.

[8] Caffarelli, L. A., M. G. Crandall, M. Kocan and A. Święch, *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), 365–397.

[9] Crandall, M. G., K. Fok, M. Kocan and A. Święch, *Indiana Univ. Math. J.*, **47** (4) (1998), 1293–1326.

[10] Crandall, M. G., H. Ishii and P.-L. Lions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992), 1–67.

[11] Crandall, M. G., M. Kocan, P.-L. Lions and A. Święch, *Electron. J. Differential Equations*, **1999** (24) (1999), 1–20.

[12] Crandall M. G., M. Kocan, P. Soravia and A. Święch, *Pitman Res. Notes in Math.*, **50** (1996), 136–162.

[13] Crandall, M. G., M. Kocan and A. Święch, *Comm. Partial Differential Equations*, **25** (2000), 1997–2053.

[14] Crandall, M. G. and P.-L. Lions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, (1983),

[15] Crandall, M. G. and A. Święch, *Lecture Notes in Pure and Applied Math.*, **235** (2003), 121–127.

[16] Escauriaza, L., *Indiana Univ. Math. J.*, **42** (1993), 413–423.

[17] Evans, L. C., *Comm. Pure Appl. Math.*, **35** (1982), 333–362.
[18] Evans, L. C., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **275** (1) (1983), 245–255.
[19] Fabes, E. and D. Stroock, *Duke J. Math.*, **51** (1984), 997–1016.
[20] Felmer, P., A. Quaas and B. Sirakov, *SIAM J. Math. Anal.*, **42** (3) (2010), 997–1024.
[21] Fok, P., Ph.D. Thesis, UCSB, 1996.
[22] Fok, K., *Comm. Partial Differential Equations*, **5-6** (1998), 967–983.
[23] Gilbarg, D. and N. S. Trudinger, Springer-Verlag, New York, 1983.
[24] Imbert, C., Preprint, 2010.
[25] Jensen, R., M. Kocan and A. Święch, *Proc. Arem. Math. Soc.*, **130** (2) (2001), 533–542.
[26] Jensen, R. and A. Święch, *Comm. Pure Appl. Anal.*, **4** (1) (2005), 187–195.
[27] Koike, S., MSJ Mem., **13**, 2004.
[28] Koike, S., 数学, **62** (3) (2010), 315–328.
[29] Koike, S., *Saitama Math. J.*, **23** (2006), 9–28.
[30] Koike, S. and K. Nakagawa, *Electron. J. Differential Equations*, **2009** (146) (2009), 1–14.
[31] Koike, S. and A. Święch, *NoDEA*, **11** (2004), 491–509.
[32] Koike, S. and A. Święch, *Math. Ann.*, **339** (2007), 461–484.
[33] Koike, S. and A. Święch, *J. Math. Soc. Japan*, **61** (3) (2009), 723–755.
[34] Koike, S. and A. Święch, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **5** (2) (2009), 291–304.
[35] Koike, S. and A. Święch, in preparation.
[36] Koike, S. and T. Takahashi, *Adv. Differential Equations*, **7** (2002), 493–512.
[37] Krylov, N. V., *Reidel Pub. Co. Dordrecht*, 1987.
[38] Krylov, N. V. and M. V. Safonov, *Soviet Math.*, **20** (1979), 253–256.
[39] Maugeri, A., D. K. Palagachev and L. G. Softova, *WILEY-VCH Verlag*, 2000.
[40] Nadirashvili, N., *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **24** (3) (1997), 537–549.
[41] Nadirashvili, N. and S. Vlăduţ, *Geom. Funct. Anal.*, **17** (4) (2007), 1283–1296.
[42] Nadirashvili, N. and S. Vlăduţ, *J. Math. Pure Appl. (9)*, **89** (2) (2008), 107–113.
[43] Nakagawa, K., *Adv. Math. Sci. Appl.*, **19** (1) (2009), 89–107.
[44] Pucci, C., *Ann. Mat. Pura Appl.*, **72** (1966), 141–170.
[45] Quaas, A. and B. Sirakov, *Indiana Univ. Math. J.*, **58** (2) (2009), 751–788.
[46] Quaas, A. and B. Sirakov, *Adv. Math.*, **218** (1) (2008), 105–135.
[47] Safonov, M. V., *SIAM J. Math. Anal.*, **30** (4) (1999), 879–895.
[48] Sirakov, B., *Arch. Rat. Mech. Appl.*, **195** (2) (2010), 579–607.

[49] Sirakov, B., *Nonlinear Anal.*, **70** (8) (2009), 3039–3046.

[50] Święch, A., *Adv. Differential Equations*, **2** (1997), 1005–1027.

[51] Trudinger, N. S., *Invent. Math.*, **61** (1) (1980), 67–79.

[52] Trudinger, N. S., *Rev. Mat. Iberoamericana*, **4** (3-4) (1988), 453–468.

[53] Trudinger, N. S., *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **108** (1-2) (1988), 57–65.

[54] Trudinger, N. S., *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, **2** (1989), 939–957.

[55] Trudinger, N. S., *Bull. Austral. Math. Soc.*, **39** (1989), 443–447.

[56] Wang L., *Comm. Pure Appl. Math.*, **45** (1992), 27–76.

[57] Winter, N., *Z. Anal. Anwend.*, **28** (2) (2009), 129–164.